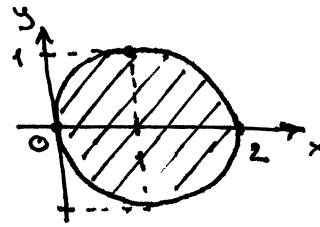
Contrôle continu du 23/03/09

Correction

1| $$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 2x} \frac{dx\,dy}{2009 + x + \cos y}$$



Domaine : $x^2+y^2 \leq 2x \iff (x-1)^2+y^2 \leq 1$

Ceci implique en particulier que

$\forall (x,y) \in D \qquad 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq \cos y \leq 1$

et alors on obtient une majoration

$$\underbrace{\frac{1}{2009+2+1}}_{=\frac{1}{2012}} \leq \frac{1}{2009+x+\cos y} \leq \underbrace{\frac{1}{2009+0-1}}_{=\frac{1}{2008}}.$$

Par conséquent :

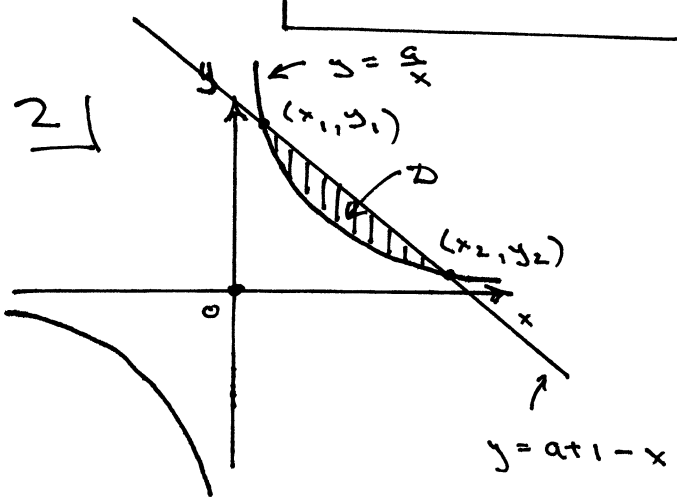
$$\frac{1}{2008}\iint_D dx\,dy \geq I \geq \frac{1}{2012}\iint_D dx\,dy$$

Comme $\iint_D dx\,dy$ = aire de D = aire d'un cercle de rayon 1 $= \pi$,

ce qui donne une estimation

$$\boxed{\frac{\pi}{2012} \leq I \leq \frac{\pi}{2008}}$$

2|



Calculons les coordonnées des points d'intersection (x_1, y_1) et (x_2, y_2) :

$$\frac{a}{x} = a+1-x$$
$$\Downarrow$$
$$x^2-(a+1)x+a = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = a$$
$$y_1 = a, \quad y_2 = 1$$

Alors la masse $M = \sigma \iint_D dx\,dy$ s'écrit comme une intégrale itérée :

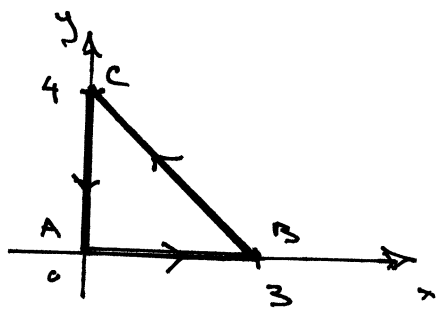
$$M = \sigma \int_1^a dx \int_{a/x}^{a+1-x} dy = \sigma \int_1^a dx \left(a+1-x-\frac{a}{x}\right) =$$

$$= \sigma \left[(a+1)x - \frac{x^2}{2} - a\ln x \right]_{x=1}^{x=a} =$$

$$= \sigma \left[a^2-1 - \frac{a^2-1}{2} - a\ln a \right] = \sigma \left[\frac{a^2-1}{2} - a\ln a \right]$$

3) $I = \int_\gamma x^2\,dy =$

$$= \underbrace{\int_{AB} x^2 dy}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \text{puisque} \\ dy=0}} + \int_{BC} x^2 dy + \underbrace{\int_{CA} x^2 dy}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \text{puisque} \\ \text{ici } x=0}} =$$



$$= \int_{BC} x^2 dy$$

Paramétrisation de BC :

$$x = x_B(1-t) + x_C \cdot t = 3(1-t) \Rightarrow dx = -3\,dt$$

$$y = y_B(1-t) + y_C \cdot t = 4t \Rightarrow dy = 4\,dt$$

Par conséquent

$$I = \int_0^1 [3(1-t)]^2\, 4\,dt = 4 \cdot 9 \cdot \frac{(t-1)^3}{3} \Big|_{t=0}^{t=1} = 12.$$

4) Méthode la plus rapide (mais pas la plus directe) :

On aimerait appliquer le thm de Gauss, mais il y a un problème - notre surface n'est pas fermée. Par contre, le flux du champ

$$\vec{E} = y\vec{e}_x + (x+y)\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$$

à travers la surface du cercle $S: z=0,\ x^2+y^2 \leq R^2$ est égale à 0, car

$$\underbrace{\int_S y\,\vec{e}_x\cdot d\vec{S}}_{=0} + \underbrace{\int_S (x+y)\,\vec{e}_y\cdot d\vec{S}}_{=0} + \underbrace{\int_S z^2\,\vec{e}_z\cdot d\vec{S}}_{=0}$$

car $\vec{e}_x, \vec{e}_y \perp d\vec{S}$ — car $z=0$ sur S

Donc on peut compléter la surface pour qu'elle soit fermée sans changer la valeur de l'intégrale et ensuite appliquer le thm de Gauss:

$$\Phi = \underset{\substack{\text{surface de}\\ \text{la demi-sphère}\\ \text{complétée}}}{\int} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underset{\substack{\text{volume}\\ \text{de la demi-sphère}\\ x^2+y^2+z^2\leq R^2,\ z\geq 0}}{\iiint} \operatorname{div}\vec{E}\, dV =$$

$$= \iiint_V \Big\{ \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial (x+y)}{\partial y}}_{=1} + \underbrace{\frac{\partial z^2}{\partial z}}_{=2z} \Big\}\, dV =$$

$$= \iiint_V (1+2z)\, dV = \underbrace{\iiint_V dV}_{\substack{\text{volume de}\\ \text{la demi-sphère}\\ = \frac{2}{3}\pi R^3}} + 2\iiint_V z\, dV =$$

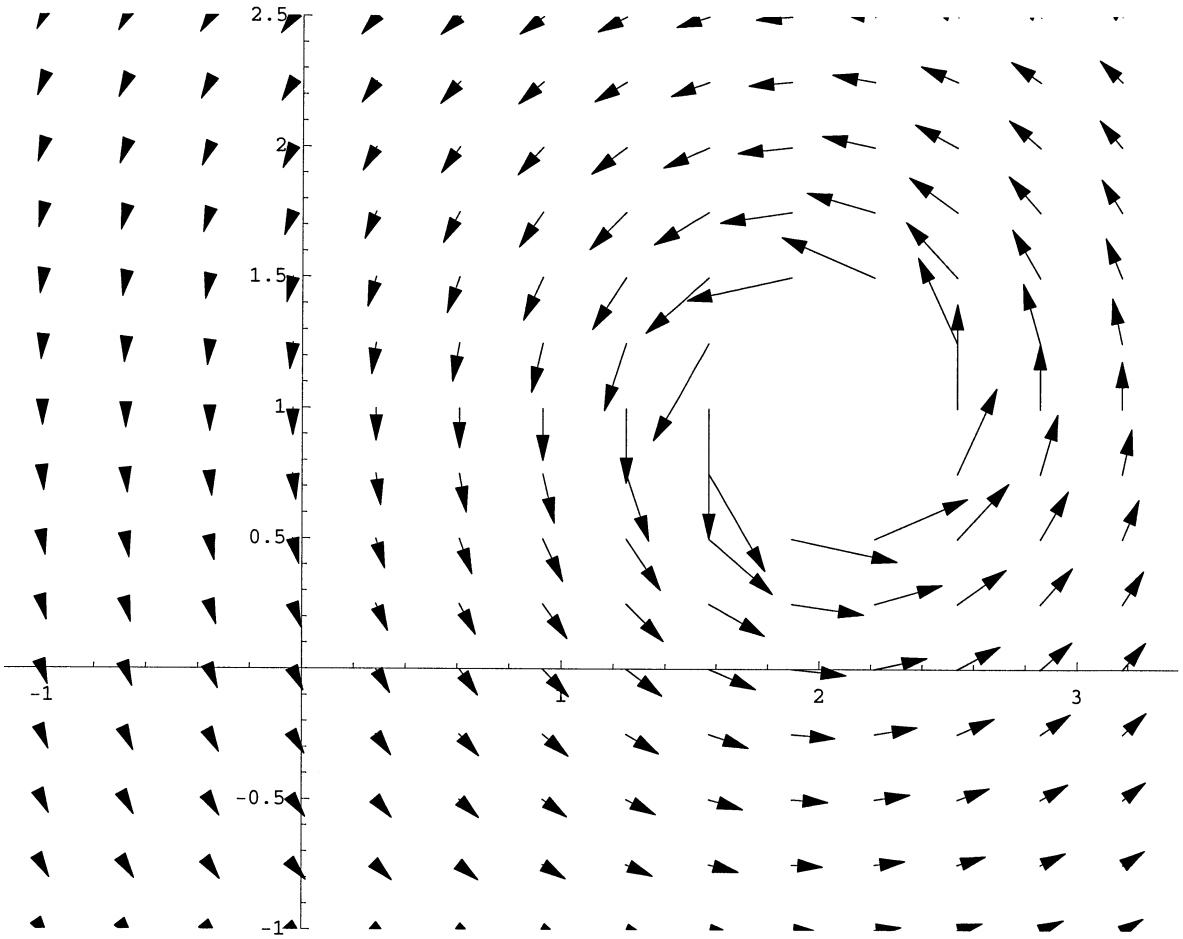
$$= \frac{2}{3}\pi R^3 + 2\int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \ r^2 \sin\theta \cdot r\cos\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 + 2\underbrace{\int_0^R r^3\, dr}_{=R^4/4}\ \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}\ \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta}_{=1/2} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{\pi R^4}{2}.$$

Ex. 5

In[31]:= PlotVectorField[{$-\frac{-1+y}{(-2+x)^2\left(1+\frac{(-1+y)^2}{(-2+x)^2}\right)}$, $\frac{1}{(-2+x)\left(1+\frac{(-1+y)^2}{(-2+x)^2}\right)}$}, {x, -1, 3.5},
{y, -1, 2.5}, PlotRange → {-1, 2.5}, Axes → True, ScaleFactor → 2, MaxArrowLength → 3]



Out[31]= - Graphics -

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-1}{x-2}\right) = -\frac{(y-1)}{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-1}{x-2}\right) = \frac{x-2}{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

Donc l'image est translaté du graph du champ

$$\vec{E} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$